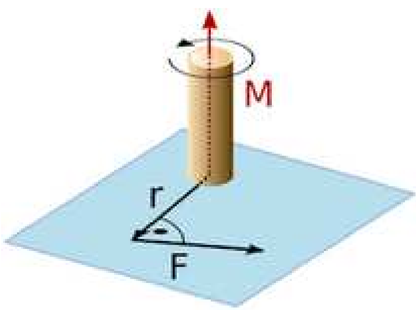
Cours

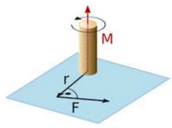
CHAPITRE 3

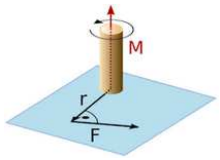
Modélisation des efforts



CHAPITRE 3

Modélisation des efforts





MODELISATION DES EFFORTS

Introduction

Chapitre 3

1

1 – DEFINITION

On appelle « action mécanique » toute cause capable de :

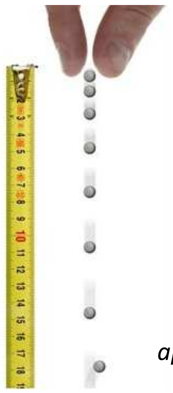
- ⇒ Déformer un corps,
- ⇒ Modifier le mouvement d'un corps (trajectoire et/ou vitesse du corps).

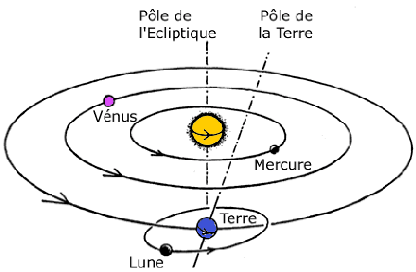
Une action mécanique s'appelle aussi « effort ». Dans ce cas, le sens qui est donné au mot « effort » est purement mécanique (une autre approche de ce même mot est utilisée en énergétique).

2 – CLASSIFICATION

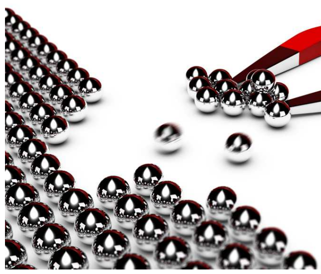
Les efforts peuvent être de différentes natures et, si on cherche à les classer, on peut alors distinguer ceux qui sont de type « **force** » et ceux qui sont de type « **couple** ». De même, qu'il soit de type force ou couple, on peut aussi considérer le fait qu'il soit de **contact** ou **à distance**.

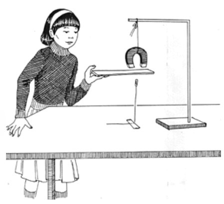
Force à distance





*Le **champ de gravitation** génère une force appelée « poids » ; c'est une **force à distance**.*





*Un **champ magnétique** génère une force ; c'est une **force à distance**.*

Force de contact

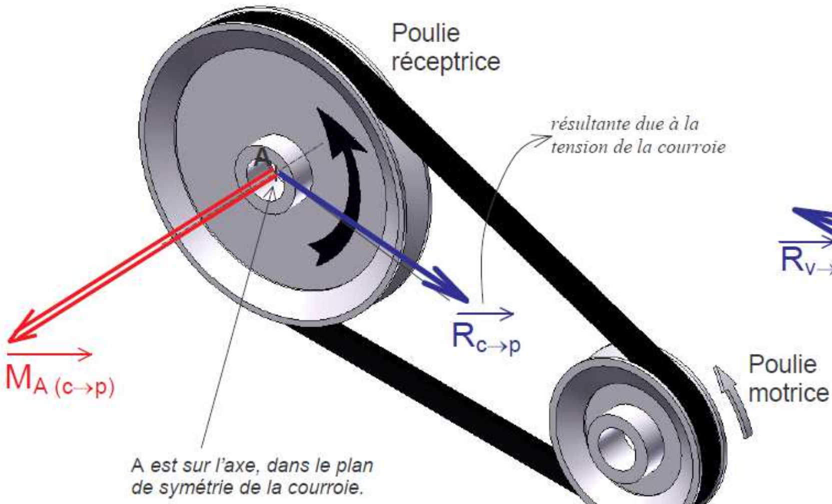
*Le **contact** entre un solide et un fluide sous pression implique une **force de contact** (poussée d'Archimède).*

*Le **contact** entre solides implique une **force de contact** (auquel peut parfois être associé un couple dans la liaison).*

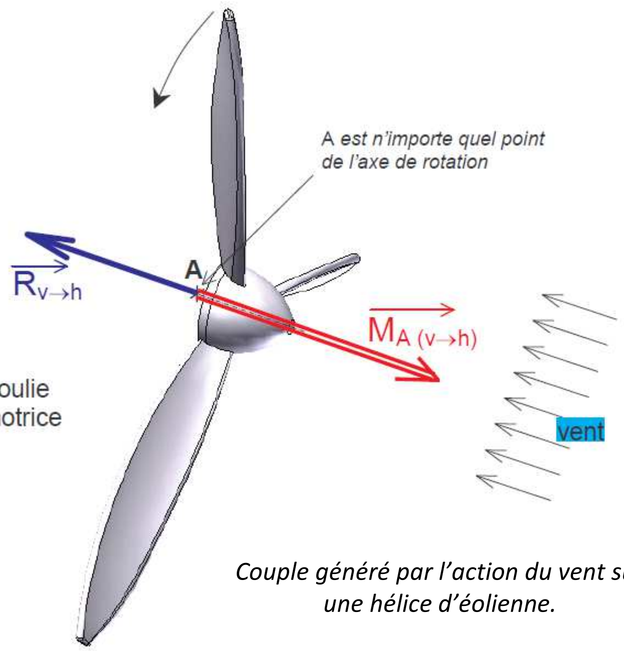
* Couple

Le couple est en quelque sorte la « *force en rotation* » ; si, mathématiquement, il se modélise à l'aide d'un couple pur, on montre que bien souvent, si ce n'est tout le temps, qu'il s'agit en fait d'un système de forces dont l'effet est ramené sur un axe (celui de rotation si l'objet doit tourner).

Concernant les couples, la distinction « à distance » ou « de contact » ne présente guère d'intérêt (bien qu'elle puisse se faire) ; nous ne ferons donc pas de distinction dans les exemples qui suivent.



Couple généré par l'action d'une courroie sur la poulie qu'elle entraîne.



Couple généré par l'action du vent sur une hélice d'éolienne.

3 – UNITES

* Force

Unité légale : Newton (N)

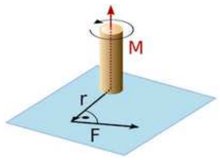
Unités pratiques souvent rencontrées : daN, kN

* Couple

Unité légale : Newton mètre (N.m)

Unités pratiques souvent rencontrées : kN.m, N.mm

D'un point de vue dimensionnel, un couple à la même dimension qu'une énergie (ML^2T^{-2}) ; cela dit, les grandeurs physiques à considérer sont bien distinctes.



MODELISATION DES EFFORTS

Modèle « force pure »

1 – PREALABLE

On parle de force pure dans deux cas :

⇒ l'action mécanique (ou effort) qu'un corps exerce sur un autre est « de contact » **ET** la zone <u>d'exercice est suffisamment petite*</u> par rapport aux dimensions des corps.

⇒ l'action mécanique (ou effort) qu'un corps exerce sur un autre est « à distance » (comme par exemple le poids ou la force magnétique).

* Idéalement, la zone se résume à un point.

Exemple et contre-exemple :

Modéliser ici l'action mécanique « chaussure/sol » par une force pure est une ***<u>bonne</u>*** *représentation de la réalité.*

Modéliser ici l'action mécanique « chaussure/sol » par une force pure est une représentation de la réalité ***<u>très approximative</u>*** *(mais faisable) ; à la force pure il faudrait aussi associer un couple…*

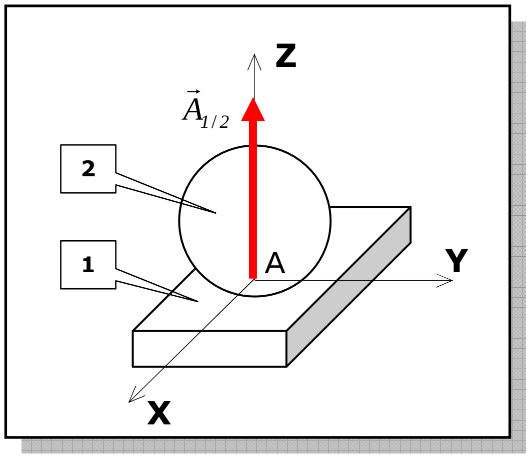
2 – MODELE MATHEMATIQUE

Une force est une grandeur physique qui possède une **<u>intensité</u>**, mais aussi une **<u>direction</u>** et un **<u>sens</u>**. Il s'agit donc d'une **<u>grandeur vectorielle</u>** (et non scalaire).

La représentation de la force exercée par le solide (1) sur le solide (2) se fait donc à l'aide d'un vecteur. A ce titre, on identifie les caractéristiques suivantes :

➔ point d'application : A ➔ direction : $\left(A, \vec{Z}\right)$ (ou verticale)

➔ sens : vers le haut ➔ intensité : $10\ N$ (par exemple)



- Ecriture vectorielle type « ligne » : $\overrightarrow{A_{1/2}} = 10 \cdot \vec{z}$

- Ecriture vectorielle type « colonne » : $\overrightarrow{A_{1/2}} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{matrix} \right.$

- Ecriture torsorielle : $\{A_{1\to 2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10 & 0 \end{Bmatrix}_R$ (utilisation d'un **torseur glisseur**)

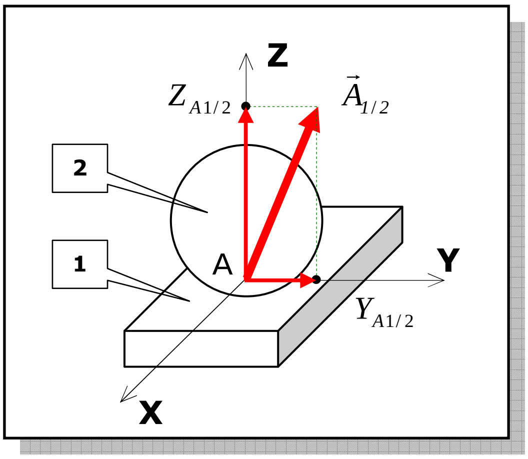
- Pour une approche graphique, on pourrait avoir ceci si tout est connu:

Nom	Point	Direction	Sens	Intensité (N)
$\overrightarrow{A_{1\to 2}}$	A	/	↙	150

Généralisation aux trois axes (et trois composantes)

Si, pour une raison quelconque, la force $\vec{A}_{1/2}$ n'est pas purement verticale (cas où on considère du frottement par exemple), alors on peut se trouver dans la configuration suivante :

$$\overrightarrow{A_{1/2}} = Y_{A1/2}\ \vec{y} + Z_{A1/2}\ \vec{z}$$



En généralisant sur les trois axes, on a :

$$\overrightarrow{A_{1/2}} = X_{A1/2}\ \vec{x} + Y_{A1/2}\ \vec{y} + Z_{A1/2}\ \vec{z} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A_{1/2}} \left| \begin{matrix} X_{A1/2} \\ Y_{A1/2} \\ Z_{A1/2} \end{matrix} \right.$$

Ou encore, avec un torseur : $\{A_{1\to 2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{A1/2} & 0 \\ Y_{A1/2} & 0 \\ Z_{A1/2} & 0 \end{Bmatrix}_R$ (utilisation d'un **torseur glisseur**)

Règle d'écriture à respecter :

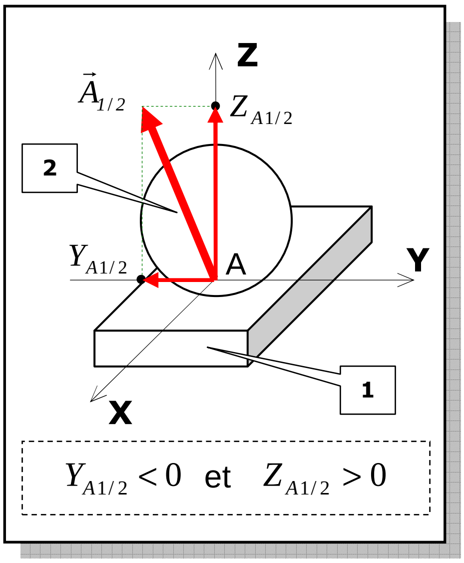
Texte normal X

Texte en indice $_{A1/2}$

$$X_{A1/2}$$

majuscule — majuscule

Remarques importantes :



$X_{A1/2}$, $Y_{A1/2}$ et $Z_{A1/2}$ sont les composantes de la force $\vec{A}_{1/2}$ sur les axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Elles s'expriment bien entendu en unité de force (N, daN, kN, …).

Les composantes $X_{A1/2}$, $Y_{A1/2}$ et $Z_{A1/2}$ peuvent être **positives ou négatives** selon leur sens et celui de l'axe qui les porte :

Intensité d'une force :

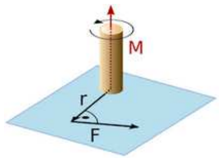
Il s'agit de la longueur du vecteur force $\vec{A}_{1/2}$. Elle s'exprime en N (ou daN, kN, …) et elle s'écrit $\left\|\vec{A}_{1/2}\right\|$ ou, plus simplement, $A_{1/2}$ (le nom de la force, non surmonté de la « flèche »).

Il ne faut pas confondre la force $\vec{A}_{1/2}$ qui est un VECTEUR avec son intensité $A_{1/2}$ qui est un NOMBRE

Une simple application du théorème de Pythagore permet de calculer l'intensité d'une force connaissant ses composantes :

$$\boxed{A_{1/2} = \sqrt{X^2_{A1/2} + Y^2_{A1/2} + Z^2_{A1/2}}}$$

Compte tenu de ce calcul, on notera **qu'une intensité est TOUJOURS positive**.



MODELISATION DES EFFORTS

Modèle « couple pur »

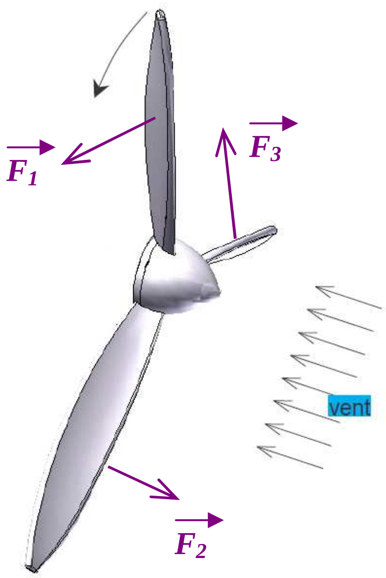
Chapitre 3

3

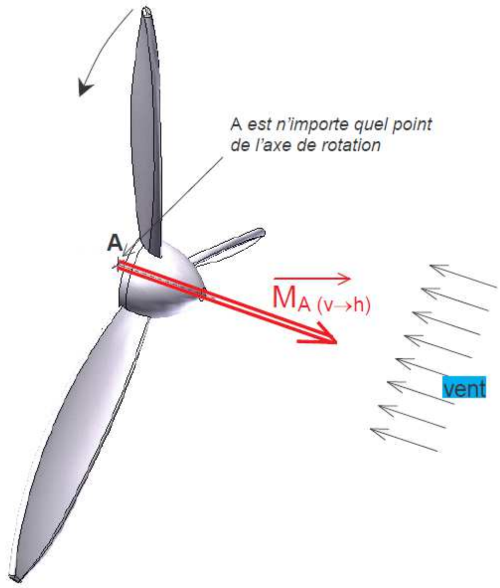
1 – PREALABLE

Le couple pur est plus une abstraction mathématique qu'une réalité physique, en ce sens qu'il n'existe pas vraiment dans la nature. On trouvera par contre des *systèmes de forces pures* dont l'effet, ramené à un axe, sera assimilé à celui d'un couple pur.

Exemple :

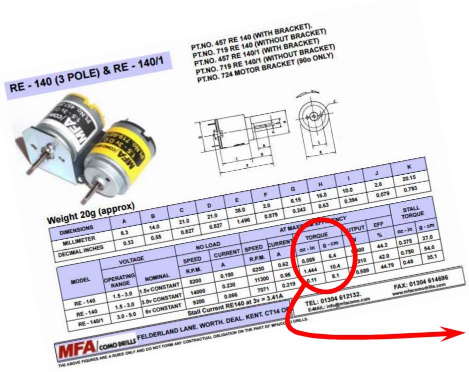


Le vent exerce sur chacune des pales de l'hélice une force considérée comme pure.



Le système de forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$ créé un couple sur l'axe de rotation de l'hélice.

Ainsi, dans un problème de mécanique, soit on considère les moments des forces, soit on considère leur effet, c'est-à-dire le couple. En général, c'est l'énoncé qui dicte les choses et on n'a pas vraiment de question particulière à se poser.



Par exemple, dans le cas d'un moteur, le constructeur donne le couple disponible (et non le système de forces et la géométrie dont il résulte) ; le couple sera considéré comme un couple pur (alors qu'il ne l'est pas). Ceci revêt un aspect purement pratique.

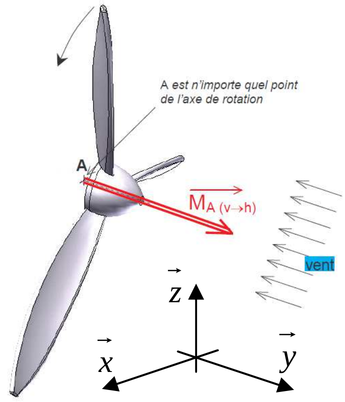
TORQUE	
oz - in	g - cm
0.089	6.4
1.444	10.4
0.11	8.1

« Torque » signifie « couple » en anglais.

2 – MODELE MATHEMATIQUE

Un couple est une grandeur physique qui possède une **intensité**, mais aussi une **direction** et un **sens**. Il s'agit donc d'une **grandeur vectorielle** (et non scalaire).

La représentation du couple exercé par un solide sur un autre se fait donc à l'aide d'un vecteur. A ce titre, on identifie les caractéristiques suivantes :



➔ point d'application : A ➔ direction : $(A,\vec{y})$

➔ sens : positif ou négatif ➔ intensité : $8\ N.m$ (par exemple)

* Ecriture vectorielle type « ligne » : $\overrightarrow{M_{A(V\to h)}} = 8 \cdot \vec{y}$

* Ecriture vectorielle type « colonne » : $\overrightarrow{M_{A(V\to h)}}\left|\begin{matrix}0\\8\\0\end{matrix}\right.$

* Ecriture torsorielle : $\{M_{A(V\to h)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 8\\0 & 0\end{Bmatrix}_R$ (utilisation d'un **torseur couple**)

* Pour une approche graphique, il n'y a pas d'écriture spécifique.

Généralisation aux trois axes (et trois composantes)

$$\overrightarrow{M_{A(V\to h)}} = L_{A(V\to h)}\,\vec{x} + M_{A(V\to h)}\,\vec{y} + N_{A(V\to h)}\,\vec{z} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_{A(V\to h)}}\left|\begin{matrix}L_{A(V\to h)}\\M_{A(V\to h)}\\N_{A(V\to h)}\end{matrix}\right.$$

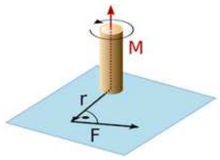
Ou encore, avec un torseur :

$$\{M_{A(V\to h)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}0 & L_{A(V\to h)}\\0 & M_{A(V\to h)}\\0 & N_{A(V\to h)}\end{Bmatrix}_R$$

(utilisation d'un **torseur couple**)

Il ne faut pas confondre le couple $\vec{C}$ qui est un VECTEUR avec son intensité C qui est un NOMBRE

Rappel : une intensité de vecteur est TOUJOURS positive.



MODELISATION DES EFFORTS

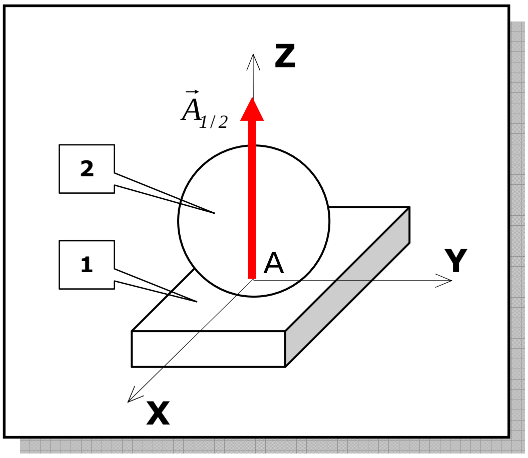
Actions mécaniques de contact
Charge ponctuelle

1 – DEFINITION

Soit deux solides (1) et (2) en contact ponctuel au point A ; la zone de contact se résume à un point.

On appelle « **charge ponctuelle** » - ou plus simplement « **force** » - la force qu'un solide exerce sur l'autre, $\overrightarrow{A_{1/2}}$ par exemple.

<u>Unité légale</u> : N



En RDM (Résistance Des Matériaux), on parle de **charge concentrée** (sous entendu concentrée en un point).

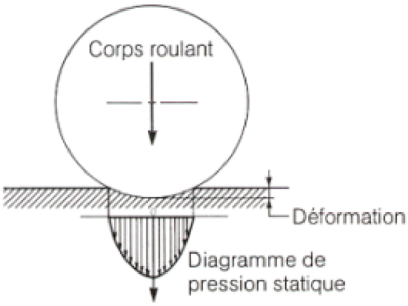
2 – MODELISATION

L'action mécanique de type « charge ponctuelle » se modélise tout simplement comme une **<u>force pure</u>**.

3 – LIMITE DU MODELE

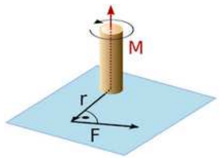
Cette situation, très fréquente dans nombre de problèmes, reste toutefois théorique. En effet, un contact rigoureusement ponctuel entraîne une *pression de contact infinie*, ce qui impliquerait une destruction immédiate des surfaces de contact.

Pression de hertz et déformation au niveau du contact



Dans la réalité, les matériaux qui composent les solides possèdent une élasticité (même les matériaux les plus durs) ; cette élasticité amène les solides à se déformer localement, au niveau du contact. La zone de contact devient alors surfacique mais, si les dimensions de cette surface restent petites face aux dimensions des solides en contact, alors elle est assimilée à un point : c'est de la modélisation…

Cette approximation est valable pour des matériaux comme les métaux, le verre, le bois, certains plastiques. Elle ne serait pas du tout (ou très peu) valable avec du caoutchouc ou une éponge en mousse car les déformations sont très importantes !



MODELISATION DES EFFORTS

Actions mécaniques de contact
Charge linéique

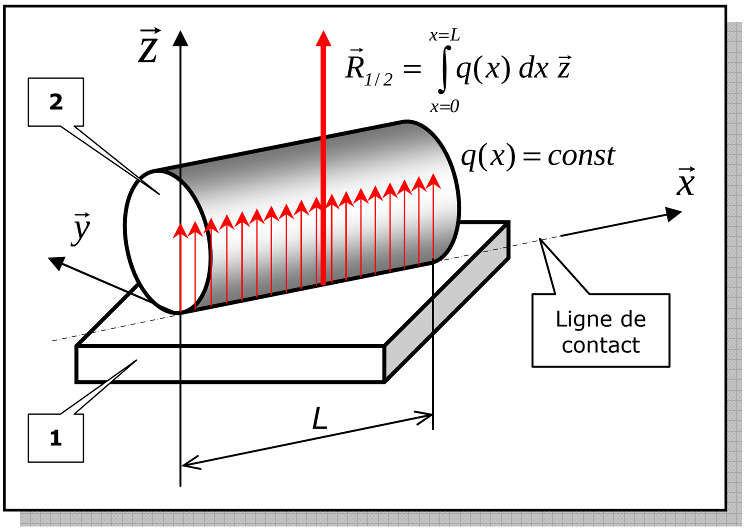
Chapitre 3
5

1 – DEFINITION

Le contact entre les solides (1) et (2) est qualifié de linéique si la zone de contact est assimilée à une ligne (droite ou pas).

On appelle « **charge linéique** » - la <u>densité de force par unité de longueur</u> qu'un solide exerce sur l'autre le long du contact.

<u>Unité légale</u> : $N \cdot m^{-1}$



2 – MODELISATION

Cette densité de force est notée $q(x)$. Elle peut être constante (comme sur la figure), c'est-à-dire avoir la même valeur en tout point de la ligne de contact.

Assimilation à une force pure (résultante) :

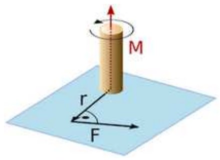
Dans les problèmes de mécanique, on peut si on le souhaite remplacer le chargement linéique par sa résultante (ici $\overrightarrow{R_{1/2}}$) ; le calcul de son intensité tout comme celui de la position de son point d'application sur la ligne nécessitera le calcul intégral (non abordé en classe de première).

L'action mécanique $\overrightarrow{R_{1/2}}$ ainsi obtenue se modélise comme une <u>**force pure**</u>.

En RDM (Résistance Des Matériaux), on parle de **charge répartie** (sous entendu répartie sur une ligne). <u>Mais attention</u> : la charge répartie n'a pas le même effet que sa résultante (en termes de contraintes et de déformations). <u>En RDM, il faut donc travailler avec la charge répartie</u> (et non sa résultante).

3 – LIMITE DU MODELE

Idem que pour une charge ponctuelle.



MODELISATION DES EFFORTS

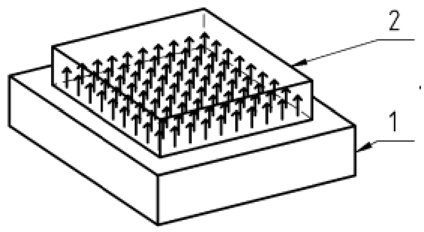
Actions mécaniques de contact

Charge surfacique (pression)

Chapitre 3

6

1 – NOTION DE PRESSION



Un solide peut subir de la part d'un autre solide ou même d'un fluide une action mécanique répartie sur une surface plane ou gauche (non plane).

On appelle « charge surfacique » – ou encore **pression** – la <u>densité de force par unité de surface</u> qu'un solide subit de la part d'un autre solide ou d'un fluide.

Contrairement aux deux autres cas (contacts ponctuel et linéique), la zone de contact est ici une surface et la charge appliquée se répartie dessus, uniformément ou pas.

<u>Unité légale</u> : $N \cdot m^{-2}$, Pa avec $1\ Pa = 1\ N \cdot m^{-2}$

<u>Unité pratique</u> : MPa, bar avec $1\ bar = 10^5\ Pa$

2 – MODELE MATHEMATIQUE – PRESSION

Soit M un point de la surface de contact. On note $p(M)$ la pression qui règne en ce point et définie par :

$$\boxed{p(M) = \frac{dF}{ds}} \quad (1)$$

Avec :

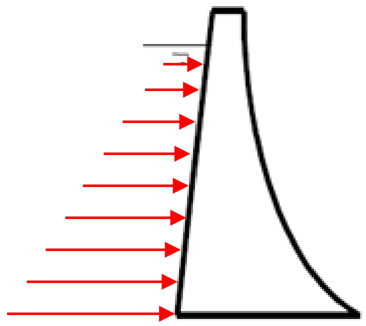
⇒ dF l'intensité de la force infinitésimale appliquée au point M de la surface S,

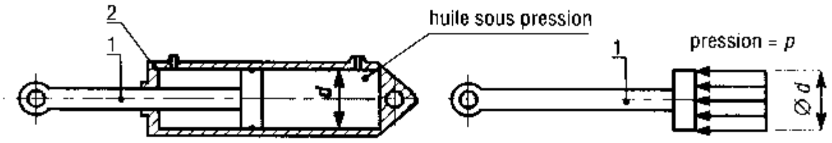
⇒ ds l'élément infinitésimal de surface (à définir selon la situation),

⇒ $p(M)$ une fonction continue donnant l'évolution de la pression en tout point de la surface S.

La pression $p(M)$ peut être **<u>variable</u>**, en suivant une loi donnée, ou bien **<u>constante</u>**, c'est-à-dire avoir la même valeur en tout point de la surface de contact. <u>Ce cas est très fréquent</u> (voir plus loin).

En Résistance Des Matériaux (RDM), on rencontre cette grandeur mais elle est appelée « **<u>contrainte</u>** », elle est notée $\sigma(M)$ et c'est un vecteur (et même un tenseur…).





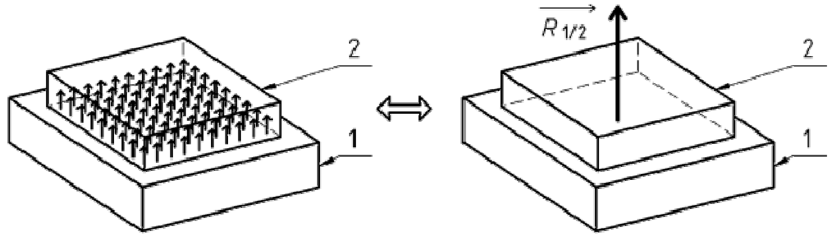
Barrage d'eau : *La pression* $p(M)$ *le long de la paroi est* ***variable****. Ici, l'expression de* $p(M)$ *sera donnée par la loi de l'hydrostatique*

Vérin hydraulique : *La pression* $p(M) = p$ *est considérée comme* ***constante*** *en tout point du fluide et donc en tout point de la surface de contact.*

Dans les problèmes de mécanique, on peut si on le souhaite remplacer le chargement surfacique par sa résultante ; le calcul de son intensité tout comme celui de la position de son point d'application dans la surface (le centre de poussée) nécessitera le calcul intégral (non abordé en classe de première).

Pour l'intensité, on a :

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F} = \int_S p(M) \cdot \vec{ds}}$ (2)



Avec :

- $\Rightarrow$ F l'intensité de la résultante du chargement surfacique,
- $\Rightarrow$ ds l'élément infinitésimal de surface (à définir selon la situation),
- $\Rightarrow$ $p(M)$ une fonction continue donnant l'évolution de la pression en tout point de la surface S .

L'action mécanique $\vec{F}$ ainsi obtenue se modélise comme une **force pure**.

Il y a toutefois le **cas simple et très fréquent de la pression constante** et il faut le connaître :

L'expression (2) donne :

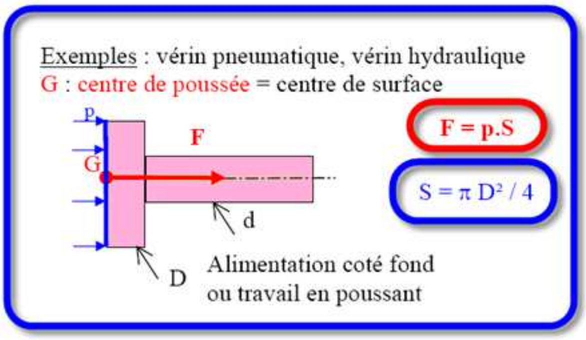
$$\boxed{F = p \cdot S}$$

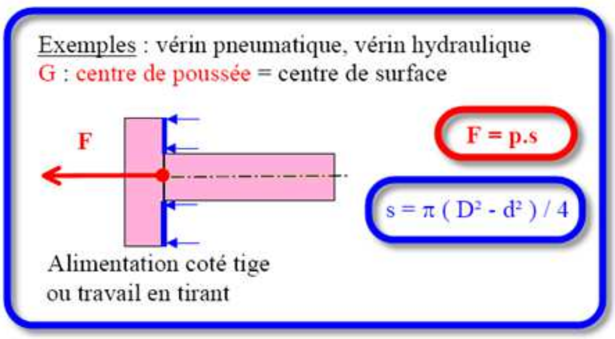
Force (N)

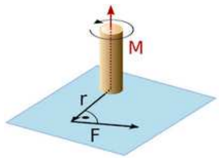
Surface (m²)

pression (Pa)

Triplet d'unités bien pratique : N, mm², MPa







MODELISATION DES EFFORTS

Actions mécaniques à distance

Le poids

Chapitre 3

7

1 – PREAMBULE

On voit en classe de seconde et peut être au collège que le poids d'un objet est donné par la relation $P = m \times g$ avec $g = 9{,}81\ N \cdot kg^{-1}$.

Ceci est vrai ! Mais d'où vient cette formule, pourquoi cette valeur de g ?

Les explications données ici sont cadrées par la mécanique newtonienne dans laquelle le poids est considéré comme une force. Un autre cadre théorique, plus général, permet d'expliquer la gravitation et le concept de poids selon une autre approche qui n'est pas évoquée ici.

2 – APPROCHE QUALITATIVE DE LA NOTION DE POIDS

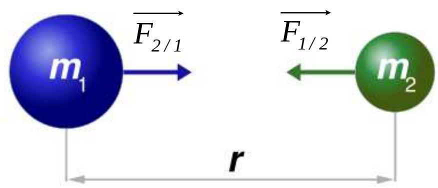
On constate que, sur terre, les objets qui nous entourent et nous-mêmes d'ailleurs sommes irrémédiablement attiré vers ce qu'on appelle « le bas ». On peut considérer, c'est ce qu'a fait Newton, qu'une force agit avec une certaine **intensité**, sur une **direction** donnée et avec un **sens**. D'ailleurs, dire « vers le bas » implique la direction « verticale », celle donnée localement par le fil à plomb, là où on est.

On constate aussi que l'intensité de la force dépend de la quantité matière mise en jeu. Il sera par exemple plus facile de soulever un petit galet trouvé sur la plage qu'un gros rocher, pourtant fait de la même matière.

3 – FORCE GRAVITATIONNELLE

La théorie de la gravitation de Newton (en mécanique classique donc) pose les choses ainsi :

« Deux corps quelconques s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de la distance de leurs centres de gravité ».



Cet énoncé donne : $F_{2/1} = F_{1/2} = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

- ➩ $G = 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ s'appelle « la constante gravitationnelle ».
- ➩ m_1 et m_2 sont les masses des corps ; elles s'expriment en kg.
- ➩ r est la distance séparant les centres de masses des corps ; elle s'exprime en m.
- ➩ $F_{i/j}$ est la force de pesanteur exercée par le corps i sur le corps j ; elle s'exprime en N. **C'est le poids**.

4 – INTENSITE DU POIDS D'UN CORPS

Considérons un corps (1) de masse m à proximité de la terre (de masse m_T et de rayon r_T connus).

Le corps (1) subit donc l'attraction gravitationnelle qui implique une force d'intensité $F_{Terre/1}$. C'est son poids, qu'on peut noter P par commodité.

On a donc $P = G \cdot \dfrac{m \cdot m_T}{r^2}$ et, en posant $g = G \cdot \dfrac{m_T}{r_T^2}$, on a la formule : $\boxed{P = m \cdot g}$

g est homogène à une accélération ; on l'appelle « accélération de la pesanteur ».

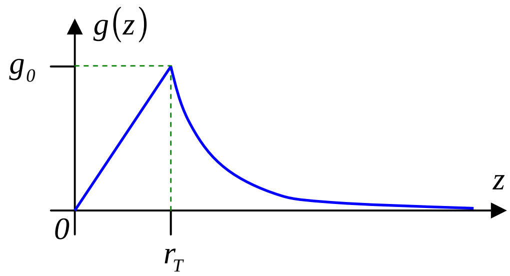
Sur terre, le calcul donne $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$ en valeur moyenne sur la surface du globe.

- *Cette notion de valeur moyenne est due au fait que la terre n'est pas tout à fait ronde.*
- *Pour information, on a* $m_T = 5{,}972 \cdot 10^{24}\ kg$ *et* $r_T = 6371\ km$.

5 – VARIATION DE g EN FONCTION DE L'ALTITUDE z

$\forall z \geq r_T$, on montre que $g(z) = g_0 \cdot \dfrac{r_T^2}{(r_T + z)^2}$ avec $g_0 = g(r_T)$

($g_0 = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$ à la surface de la terre).

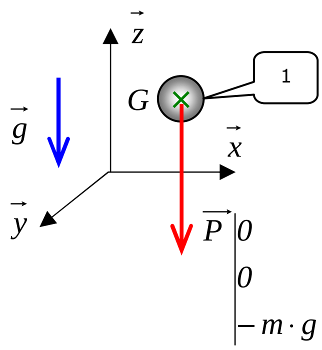


*Le poids d'un solide diminue avec l'altitude (mais sa masse reste constante). **Les variations de poids sont négligées si les variations d'altitude sont faibles**.*

6 – REPRESENTATION VECTORIELLE DU POIDS

Le champ de pesanteur est le vecteur noté $\vec{g}$, orienté vers le corps qui est en est la source. Le poids peut en conséquence être représenté à l'aide du vecteur

$$\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{g}}$$



Dans le repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ci-contre, $\vec{g}$ est porté par l'axe $\vec{z}$ qui de facto définit la verticale : $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}$. $\vec{g}$ étant orienté vers le bas, le poids du corps (1) l'est aussi et, dans le repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on a : $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{z}$

*Le vecteur poids est noté $\vec{P}$. Il est appliqué au **centre de gravité** G du corps, il est porté par la **verticale** et est orienté vers le **bas**. Son intensité vaut $P = m \cdot g$ avec $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$ à la surface de la terre.*

Dans le cas d'une approche graphique, on écrira le poids :

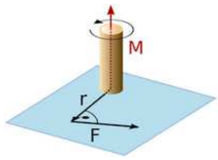
Nom	Point	Direction	Sens	Intensité
$\vec{P}$	G	|	↓	150 N

7 – REPRESENTATION TORSORIELLE DU POIDS

Le poids est une force à laquelle *aucun couple pur* n'est associé. Ce faisant, il se représente à l'aide d'un **torseur glisseur** lorsqu'il est écrit là où il est appliqué, c'est-à-dire au centre de gravité du solide :

$$\boxed{\{P\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_R}$$

Avec l'exemple pris au paragraphe précédent, on a : $\{P\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m \cdot g & 0 \end{Bmatrix}_R$



MODELISATION DES EFFORTS

Effort développé par un ressort

Chapitre 3

8

1 – PREAMBULE

<u>Définition</u> : un ressort est un organe élastique capable de supporter d'importantes déformations et destiné à exercer une force en tendant à reprendre sa forme initiale après avoir été plié, tendu, comprimé ou tordu.

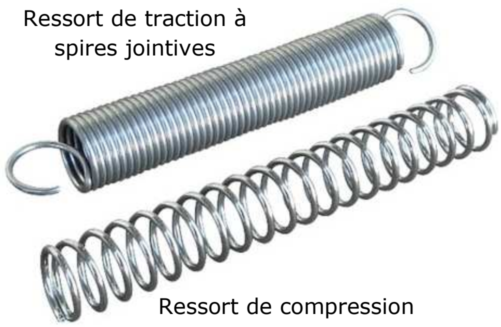
<u>Fonction</u> : les ressorts sont destinés à amortir des chocs [tampons, ressorts de suspension des voitures] par absorption d'énergie pour produire un mouvement [mouvement d'horlogerie] par restitution de l'énergie emmagasinée lors de la déformation.

Il suffit de consulter un catalogue de fabriquant de ressorts pour constater qu'il en existe de tout type, de toute forme.

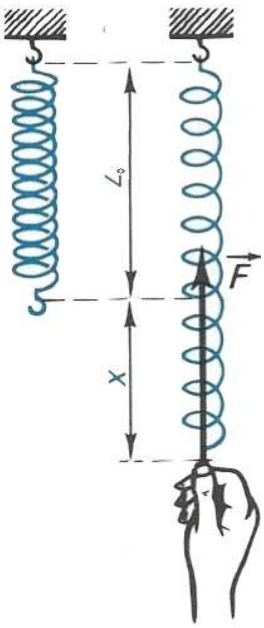
2 – RESSORT DE TRACTION / COMPRESSION

Un ressort de traction subit un allongement. Il est équipé de deux boucles ou attaches à chacune de ses extrémités. En général il a pour vocation d'emmagasiner une certaine quantité d'énergie lors d'une extension, énergie qu'il restitue quand il reprend sa forme initiale.

Un ressort de compression est une pièce mécanique cylindrique et hélicoïdale qui restitue l'effort qui lui a été imposé lorsque cet effort disparaît.

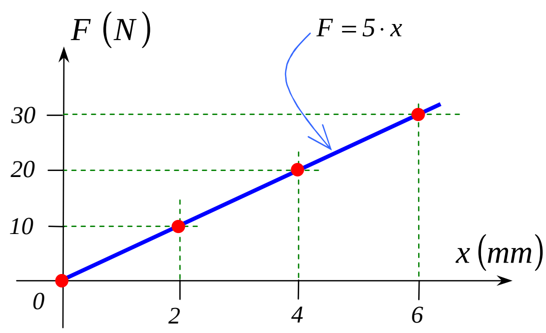


<u>Relation effort / allongement</u> : (loi de comportement)



On considère un ressort de traction de longueur initiale L_0 sur lequel on tire. Soumis à l'effort $\vec{F}$, le ressort a une nouvelle longueur L_1 ; il s'est allongé de $x = |L_1 - L_0|$.

On constate expérimentalement (et on peut le montrer théoriquement) que **l'effort est proportionnel à l'allongement**. L'équation est donc celle d'une droite passant par l'origine (si pas de précontrainte) :



Raideur ($N.mm^{-1}$)

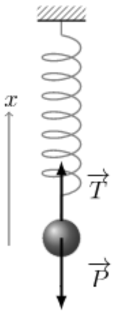
Force (N)

Allongement (mm)

$$\boxed{F = k \cdot x}$$

L'allongement x est parfois noté Δx ; c'est la même chose.

Les ressorts de compression on le même comportement que les ressorts de traction.



Modélisation : l'effort développé par un ressort de traction ou de compression se modélise à l'aide d'un **glisseur** :

$$\boxed{\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_R = {}_A\begin{Bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R = {}_A\begin{Bmatrix} k \cdot x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R}$$

Energie emmagasinée :

C'est à partir de la notion de travail d'une force et d'un petit calcul intégral qu'on montre très facilement la relation ci-contre :

Allongement (m)
Energie (J) Raideur ($N.m^{-1}$)

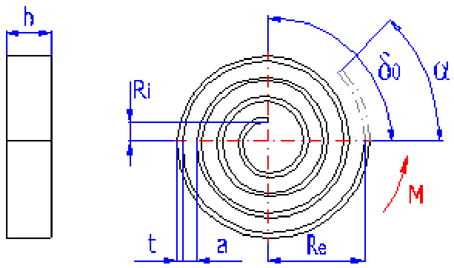
$$\boxed{E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2}$$

Attention aux unités !

⇨ Voir la section « Energétique » pour plus d'information.

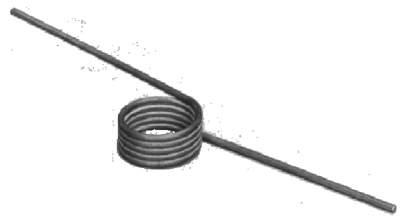
3 – RESSORT DE TORSION

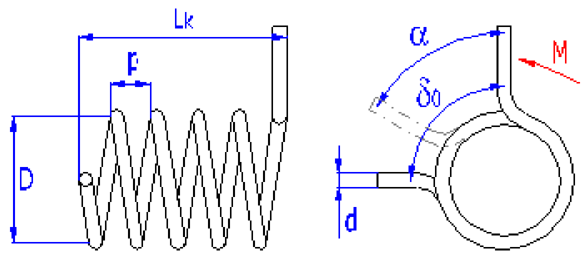
Ressort en spirale



Ressort fait d'une bande de coupe rectangulaire enroulée dans la forme de la spirale d'Archimède, avec un espacement constant entre ses spires actives, sous l'action d'un couple de forces dans la direction de l'enroulement.

Ressort cylindrique hélicoïdal





Ressorts de forme cylindrique faits de fils hélicoïdaux, avec un espacement constant entre les spires actives, capables d'absorber les forces externes appliquées dans les plans perpendiculaires à l'axe d'enroulement par un couple dans la direction de l'enroulement ou du déroulement.

Couple (N.m) **Raideur** ($N.m.rad^{-1}$)

$$\boxed{C = k \cdot \alpha}$$

Angle de déformation (rad)

Loi de comportement

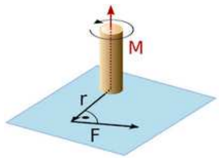
$$\boxed{\{M\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}_R = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & k \cdot \alpha \end{Bmatrix}_R}$$

Modélisation par un torseur couple

Allongement (rad)
Energie (J) Raideur ($N.m.rad^{-1}$)

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \alpha^2}$$

Energie emmagasinée



MODELISATION DES EFFORTS

Moment d'une force

Chapitre 3

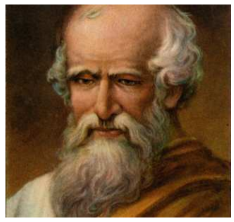
9

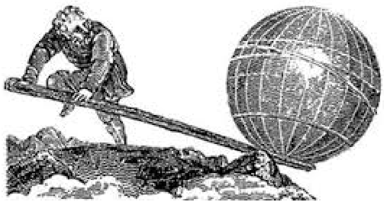
1 – PREALABLE

On peut constater que les effets d'une force sur un solide peuvent être différents suivant la position de son point d'application sur le solide.

Archimède, ayant réfléchit à tout cela disait : « *Donnez moi un point d'appui et je soulèverai le monde* ».

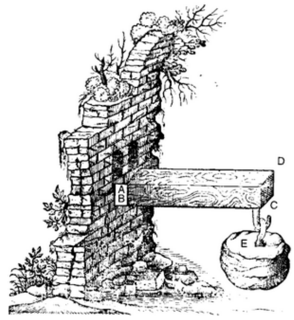
Il faudra attendre **Galilée**, fondateur de la physique moderne, pour disposer d'une approche mathématique avec la notion de *moment de force* (« momento » en italien).



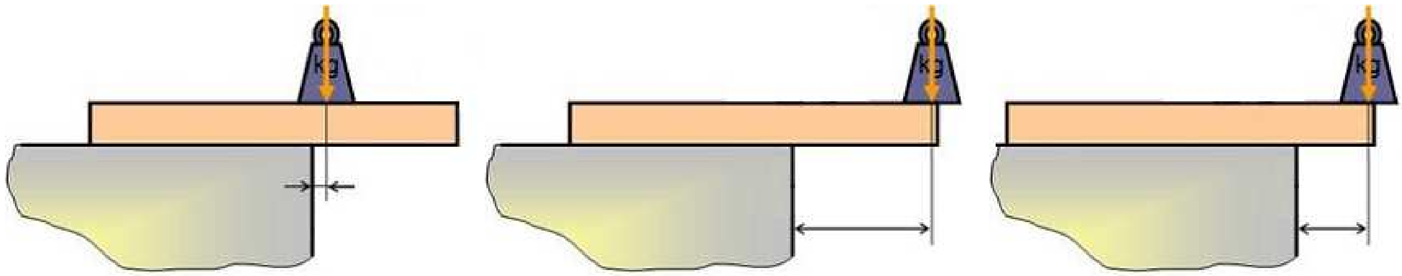


Archimède
(287 – 212 Av. J-C)

Galilée
(1564 – 1642)

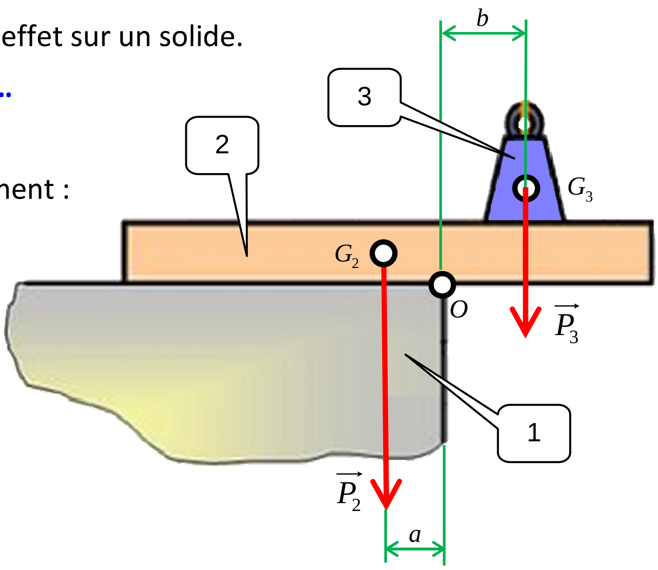


2 – MISE EN EVIDENCE DU PHENOMENE



Basculera, basculera pas ?

La seule notion de force ne suffit pas à décrire sont effet sur un solide.
Une autre notion est nécessaire, celle de <u>moment</u>…



Recherche de tous les éléments liés au risque de basculement :

- Le poids P_2 de la plaque :
  - ☞ si P_2 ↘ alors Basc ↗
- Le poids P_3 du bloc :
  - ☞ si P_3 ↘ alors Basc ↘
- La distance *a* du poids P_2 par rapport à un point O :
  - ☞ si *a* ↘ alors Basc ↗
- La distance *b* du poids P_3 par rapport à ce même point O :
  - ☞ si *b* ↘ alors Basc ↘

3 – MODELE MATHEMATIQUE

Mise en équation du constat :

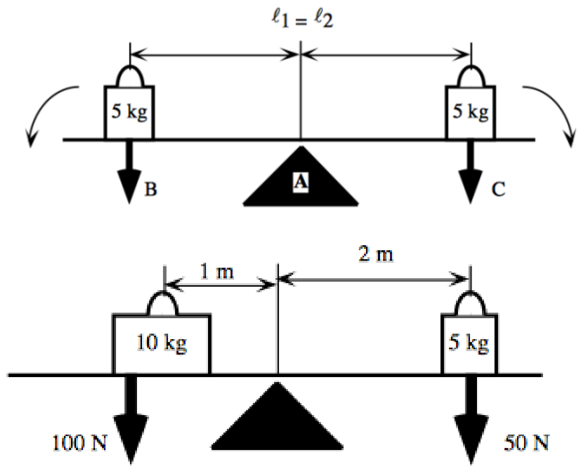
On peut constater comme l'on fait les savants évoqués plus haut que, pour avoir l'équilibre dans les situations ci-contre, il faut que le rapport des forces soit égal au rapport <u>inverse</u> des distances :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Formule qu'on peut écrire comme ceci :

$$F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$$

Dans chacun des membres de cette formule, on multiplie une force avec une distance. Ce produit « force x distance » correspond à une **grandeur physique qu'on appelle <u>le moment</u>** (de l'italien « *momento* », du à Galilée).



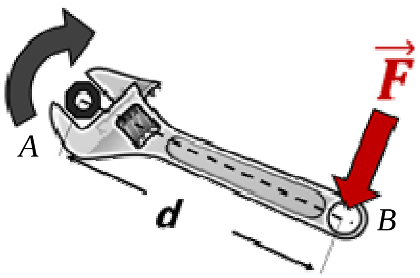
L'équilibre est obtenu si le rapport des forces est égal au rapport inverse des distances.

Unité du moment (système MKS) :

La force s'exprime en N et la distance en m ; <u>le moment s'exprime donc en $N \cdot m$.</u>

Moment algébrique – Notion de couple :

Le glisseur $\vec{F}$ appliqué en *B* a, au point *A*, un moment qui se calcule comme ceci :



La distance « d » s'appelle le **<u>bras de levier</u>**.
Elle est **<u>perpendiculaire à la direction de la force</u>**.

$$\boxed{M_A\left(\vec{F}\right) = \pm\, F \times d}$$

Lire « *le moment au point A de la force F est égal à plus ou moins le produit de l'intensité de F avec le bras de levier d* ».

On parle aussi de **<u>couple</u>** ; ici, avec la clé, ça serait un couple de serrage.
Quant au signe, il dépend du sens positif défini pour une étude donnée.

Moment vectoriel :

Une force est une grandeur physique qui possède une **<u>intensité</u>**, mais aussi une **<u>direction</u>** et un **<u>sens</u>**. Il s'agit donc d'une **<u>grandeur vectorielle</u>** et non scalaire. Il en va de même pour le bras de levier et, si ces vecteurs sont distribués dans l'espace (plutôt que simplement dans le plan), la formule précédente n'est pas simple d'usage ; on lui préfèrera le produit vectoriel* :

$$\boxed{\overrightarrow{M_A\left(\vec{F}\right)} = \overrightarrow{M_B\left(\vec{F}\right)} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}}$$

* voir la fiche « Mathématiques >> Produit de vecteurs ».